EXERCICE№7

1) * continuité à droite en 0

Pour x > 0 ; $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 0 = f(0)$, d'où est continue à droite en 0

* dérivabilité à droite en 0

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x+\sqrt{x}} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

2) – a) f est dérivable sur]0,+∞[et $f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x})-x(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x+\sqrt{x})^2}$

$= \frac{x+\sqrt{x}-x-\frac{\sqrt{x}}{2}}{(x+\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2} > 0$

Pour $x \in]0,+\infty[$

x	0		+∞
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \right) = 1$

b) * f est continue et strictement croissante sur [0 ,+∞[,

elle réalise donc une bijection de IR_+ sur $f(IR_+) = [f(0) , \lim\limits_{x \to +\infty} f[= [0 , 1[$

c) * f est dérivable sur]0,+∞[et $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2} \neq 0$

d'où : f^{-1} est dérivable sur f(]0,+∞[) =] 0 , 1[.

* f n'est pas dérivable à droite en 0

($\mathcal{C}_f$) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 , par suite :

($\mathcal{C}_{f^{-1}}$) admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse f(0) = 0

D'où : f^{-1}est dérivable à droite en 0, et $(f^{-1})_d'(0) = 0$

Conclusion : f^{-1} est dérivable sur [0,1[